

Analyse d'une fusée chimique

Billoir Marianne et Calbert Yanis

18 mai 2020



FIG. 1 : Envol de la fusée.

Table des matières

1	Remerciements	3
2	Introduction	3
3	Présentation du dispositif	3
4	Étude de la réaction	4
4.1	Présentation de la réaction	4
4.2	Détermination de la pression interne nécessaire à l'expulsion du bouchon	4
4.2.1	Expérience	4
4.2.2	Analyse et exploitation des résultats	5
4.3	Essai	6
4.4	Détermination de l'avancement de la réaction	6
4.5	Détermination de la masse de Bicarbonate	8
4.6	Conclusion de la partie	9
5	Étude cinétique	9
5.1	Définition du problème	9
5.2	Sans frottements	10
5.2.1	Première phase	10
5.2.2	Seconde phase	11
5.3	Avec les frottements	11
5.3.1	Première phase	11
5.3.2	Seconde phase	12
5.4	Détermination des paramètres expérimentaux	12
5.4.1	Débit massique	12
5.4.2	Vitesse initiale	12
5.5	Aérodynamisme : étude et comparaison de 3 fusées	14
5.5.1	Les trois fusées	14
5.5.2	Pour le frottement : le coefficient de traînée C_x et la surface de référence	14
5.5.3	Mesures	15
5.6	Piste d'optimisation	16
6	Conclusion	17
A	Protocoles	18
A.1	Protocole expérimental pour la réalisation d'un dispositif de fusée et de son lancer	18
A.1.1	Matériel	18
A.1.2	Réalisation de la fusée	18
A.1.3	Mise en place du lancer	18
A.2	Protocole de mesure de v_0	20
A.2.1	Matériel	20
A.2.2	Mise en place de l'expérience	20

1 Remerciements

Nous tenons à remercier très chaleureusement nos deux encadrantes de TP, Madame Claire Mar- rache et Madame Francesca Chiodi, à la fois pour leur soutien, leurs questions et leurs conseils qui nous ont permis au cours des semaines d'améliorer notre projet et de nous ouvrir sur de nouvelles perspectives. Nous souhaitons également remercier Monsieur Frédéric Bouquet pour avoir accepté notre projet de TP malgré ses premières craintes, légitimes, sur la dangerosité de nos expériences. Enfin, nous remercions toute l'équipe de la faculté d'Orsay gérant les travaux pratiques pour cette proposition de TPs confinés qui nous aura permis de découvrir la physique autrement, même s'il nous tarde de reprendre les expérimentations en laboratoire dès que les conditions sanitaires le permettront.

2 Introduction

Nous avons décidé, pour ces projets de TPs confinés, d'étudier le fonctionnement d'une fusée chimique. Notre choix s'est porté sur une fusée à base de vinaigre et de bicarbonate de soude, la réaction de ces deux réactifs produisant du C_{O_2} à l'origine de la propulsion de la fusée. Ainsi, nous avons tout d'abord cherché à étudier cette réaction chimique, principalement dans le but d'améliorer son rendement. Dans un deuxième temps, nous nous sommes focalisés sur le lancer à proprement dit de notre fusée et de la cinématique associée. Nous avons surtout cherché à comparer la théorie avec nos expériences. Pour cela, nous avons créé un premier dispositif selon le protocole établi par nous-même et visible en annexe A.1 grâce auquel nous avons pu déterminer des paramètres expérimentaux (débit massique et vitesse initiale). Enfin, nous avons souhaité comparer ce dispositif à d'autres modèles supposés « moins » et « plus » aérodynamiques afin de mettre en évidence l'influence de la forme de notre fusée.

3 Présentation du dispositif

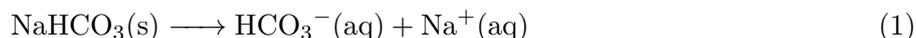
Voici le dispositif que nous avons créé puis sur lequel nous avons réalisé la majorité de nos expériences selon le protocole en annexe A.1.



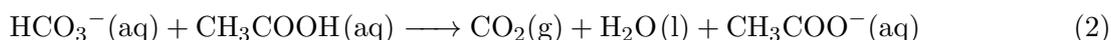
4 Étude de la réaction

4.1 Présentation de la réaction

Afin d'analyser la propulsion de notre fusée, il nous a paru tout d'abord nécessaire d'étudier la réaction chimique à l'origine de cette propulsion. Comme nous l'avons précédemment introduit, nous avons choisi comme réactifs l'acide éthanoïque contenu dans le vinaigre ($\text{CH}_3\text{COOH}(\text{aq})$) et du bicarbonate de soude ($\text{NaHCO}_3(\text{s})$). Dans un premier temps, le bicarbonate de soude se dissout totalement et immédiatement dans le vinaigre selon l'équation 1.



Puis les deux composants réagissent selon la réaction 2.



Ainsi, lorsque le vinaigre entre en contact avec le bicarbonate de soude, du dioxyde de carbone est produit, ce qui augmente la pression dans la bouteille puisque fermée hermétiquement par un bouchon de liège. Au bout d'un certain temps, la force de pression expulse le bouchon puis le vinaigre (pour une fusée on parle de gaz d'éjection), propulsant de la sorte la fusée.

4.2 Détermination de la pression interne nécessaire à l'expulsion du bouchon

Dans un premier temps, nous avons cherché à savoir quelle était la pression interne minimale à avoir dans le réservoir de notre fusée pour que le bouchon soit expulsé. En effet, l'objectif était de connaître les quantités minimales de réactifs à introduire afin d'éviter de gâcher trop de produit.

4.2.1 Expérience

Afin de déterminer cette pression minimale, nous avons mis en œuvre une expérience consistant à mesurer (approximativement) la force nécessaire au débouchage de notre bouteille. Voici l'idée :

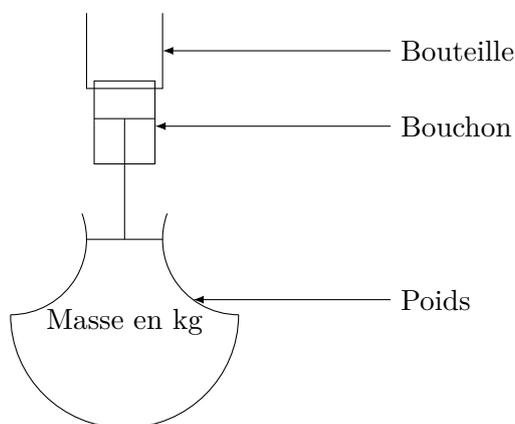
Principe : Accrocher des poids au bouchon de la fusée.

Hypothèse : Les pressions interne et externes sont considérées équivalentes.

Matériel nécessaire : Déterminer la force nécessaire pour dégager le bouchon.

Besoin : Corde et poids dont on connaît la masse. Ici, nous avons pris des haltères de 500 g et des bouteilles d'eau en plastique de 1,5L soit 1,5kg.

Schéma : Voici un schéma de l'expérience :



Résultat de l'expérience : À partir de 2kg, le bouchon finit par être expulsé après un court laps de temps. À partir de 3kg, le bouchon est expulsé instantanément.

4.2.2 Analyse et exploitation des résultats

À partir de la sous-section 4.2.1, on en déduit qu'il faut une force d'intensité

$$F = mg = 30\text{N}$$

pour que le bouchon soit expulsé. Nous n'avons pas mis d'incertitude sur cette mesure car extrêmement approximative. En effet, elle dépend grandement de la manière dont nous enfonçons le bouchon et nous n'avons pas réussi à trouver de poids intermédiaire entre 2,5kg et 3kg. De ce fait, il se pourrait très bien que notre bouchon s'en aille immédiatement à partir d'un poids compris entre 2,5kg et 3kg. L'intensité de la force est donc imposée dans la suite comme une constante déterminée empiriquement.

Connaissant maintenant cette force minimale à appliquer, on peut en déduire la pression associée en utilisant le fait que $P = \frac{F}{S}$.

Diamètre du bouchon : $D = 2,5 \pm 0,05\text{cm}$.

Surface : $S = \pi r^2 = \frac{\pi}{4}D^2 = 4,9\text{cm}^2$. De plus,

$$\delta S = 2S \frac{\delta D}{D} = 0,2\text{cm}^2$$

Ainsi, $S = 4,9 \pm 0,2\text{cm}^2$.

Pression : $P = \frac{F}{S} = 6,1 \times 10^4\text{Pa}$. De plus,

$$\delta P = P \frac{\delta S}{S} = 2 \times 10^3\text{Pa}$$

Ainsi, $P = (6,1 \pm 0,2) \times 10^4\text{Pa}$.

Maintenant que nous avons déterminé cette pression minimale, nous cherchons à en déduire les quantités de réactifs permettant d'obtenir celle-ci. On introduit les réactifs dans les proportions stœchiométriques afin que la réaction 2 soit totale (et donc qu'il n'y ait aucune perte de réactif). On a alors :

$$n(\text{HCO}_3^-(\text{aq})) = n(\text{CH}_3\text{COOH}(\text{aq})) = n_f = n(\text{CO}_2(\text{g}))$$

Avec les résultats de la sous-section 4.2.2, on peut déterminer $n(\text{CO}_2(\text{g}))$ à partir de la formule des gaz parfaits.

$$n(\text{CO}_2(\text{g})) = \frac{PV}{RT} = 1,3 \times 10^{-2}\text{mol}$$

Avec

- $R = 8,314\text{J K}^{-1}\text{mol}^{-1}$
- $V = 0,5\text{L} = 0,5 \times 10^{-3}\text{m}^3$
- $T = 293\text{K}$ température annoncée lors de la réalisation de l'expérience.

$$\delta n = n \frac{\delta P}{P} = 4 \times 10^{-4}\text{mol}$$

Donc, $n(\text{CO}_2(\text{g})) = (1,3 \pm 0,04) \times 10^{-2}\text{mol}$

On peut désormais en déduire la masse de bicarbonate de soude et le volume d'acide acétique à prélever.

Pour le bicarbonate de soude : à partir de l'équation de réaction 1, on en déduit que $n(\text{NaHCO}_3(\text{s})) = n(\text{HCO}_3^-(\text{aq})) = n(\text{CO}_2(\text{g}))$.

Or $m = nM$ avec $M = M(\text{Na}) + M(\text{H}) + M(\text{C}) + 3M(\text{O}) = 23 + 1 + 12 + 3 \times 16 = 84 \text{g mol}^{-1}$

$$\delta m = m \frac{\delta n}{n} = 0,03 \text{g}$$

Donc, $m(\text{NaHCO}_3(\text{s})) = 1,1 \pm 0,08 \text{g}$.

Pour l'acide acétique : $M = 4M(\text{H}) + 2M(\text{C}) + 2M(\text{O}) = 4 \times 1 + 2 \times 12 + 2 \times 16 = 60 \text{g mol}^{-1}$

$$\delta m = m \frac{\delta n}{n} = 0,02 \text{g}$$

Donc, $m(\text{CH}_3\text{COOH}(\text{aq})) = 0,8 \pm 0,02 \text{g}$.

On en déduit ensuite le volume à prélever en fonction du degré du vinaigre que l'on a. Par exemple, si l'on a du vinaigre à 8%, alors cela signifie qu'il y a 8g d'acide acétique dissout pour 100mL de vinaigre. Donc, le volume à prélever est $V = 10 \pm 0,3 \text{mL}$

4.3 Essai

Nous avons réalisé trois essais avec les concentrations déterminées ci-dessus et le bouchon a bien été éjecté dans les 3 cas. Cependant, le bouchon met un certain temps avant de sortir, il convient donc de déterminer l'avancement de la réaction.

4.4 Détermination de l'avancement de la réaction

Afin de déterminer l'avancement de la réaction, nous avons essayé différentes méthodes. Notre première idée était d'étudier l'évolution de la pression en fonction du temps. Cependant sans capteur de pression et après des essais infructueux avec un ballon de baudruche et d'autres avec une seringue, nous avons abandonné cette approche. L'idée avec la seringue était de se dire que la pression dans la bouteille (cf. 2) resterait constante en poussant sur la seringue. Avec la graduation nous aurions alors pu remonter au nombre de mole de CO_2 produites par la réaction avec la loi des gaz parfaits. Cependant, après seulement deux essais, la seringue s'est bloquée et il était impossible de refaire des tests.



FIG. 2 : Expérience avec la seringue.

Une autre idée était de tout simplement mettre du vinaigre dans un récipient sur une balance (cf. 3). Ainsi, nous pouvions mesurer la masse perdue au fur et à mesure de la réaction et remonter au nombre de moles de $\text{HCO}_3^-(\text{aq})$ (ou acide éthanoïque) au cours du temps.

En effet, on sait que la vitesse de la réaction est la dérivée de l'avancement par rapport au temps. Or, la cinétique chimique nous donne une expression de la vitesse de la réaction en fonction des concentrations des réactifs. Ainsi, la cinétique de la réaction 2 est déterminée par l'équation 3, la

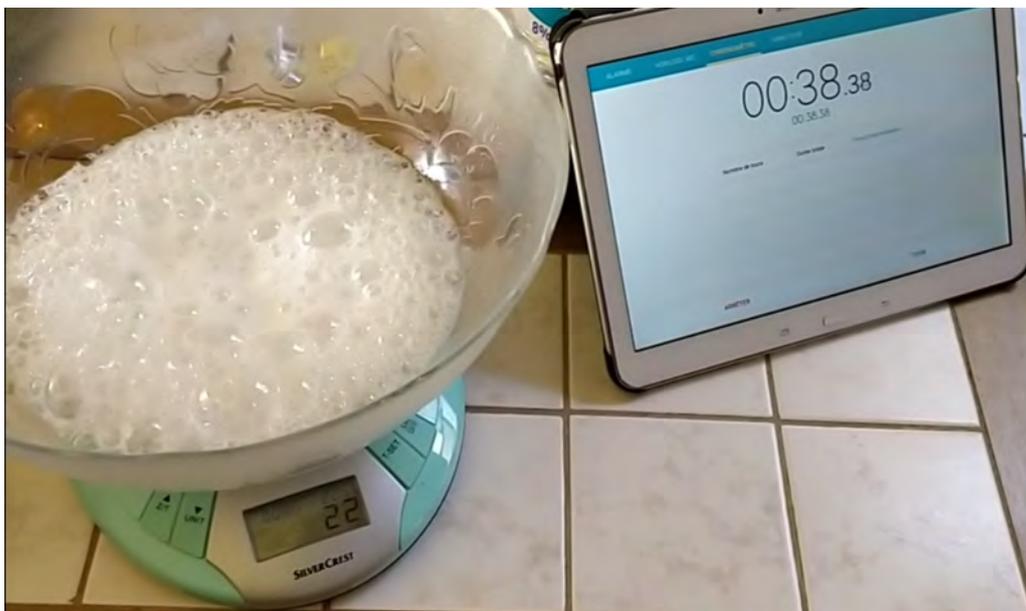


FIG. 3 : Expérience avec la balance.

dissolution étant immédiate. Il nous reste à déterminer α , β et k (en $\text{L s}^{-3} \text{mol}^{-1}$) par l'expérience. La théorie de la cinétique chimique nous dit que le temps de demi-réaction est proportionnel à la concentration dans le cas d'un ordre 0, constant dans le cas d'un ordre 1 et inversement proportionnel dans le cas d'un ordre 2.

$$v = k[\text{CH}_3\text{COOH}(\text{aq})]^\alpha[\text{HCO}_3^-(\text{aq})]^\beta \quad (3)$$

De ce fait, afin d'obtenir ce que nous voulions, il nous a fallu faire quatre essais avec des concentrations en réactifs différentes et que nous avons représentés dans la figure 4. Ainsi, dans un premier temps, nous avons mis le vinaigre en large excès puis nous avons fait deux essais chacun avec une masse de bicarbonate de soude différente pour avoir deux concentrations différentes. Enfin, pour les deux autres essais, nous avons inversés les rôles joués par le vinaigre et le bicarbonate de soude.

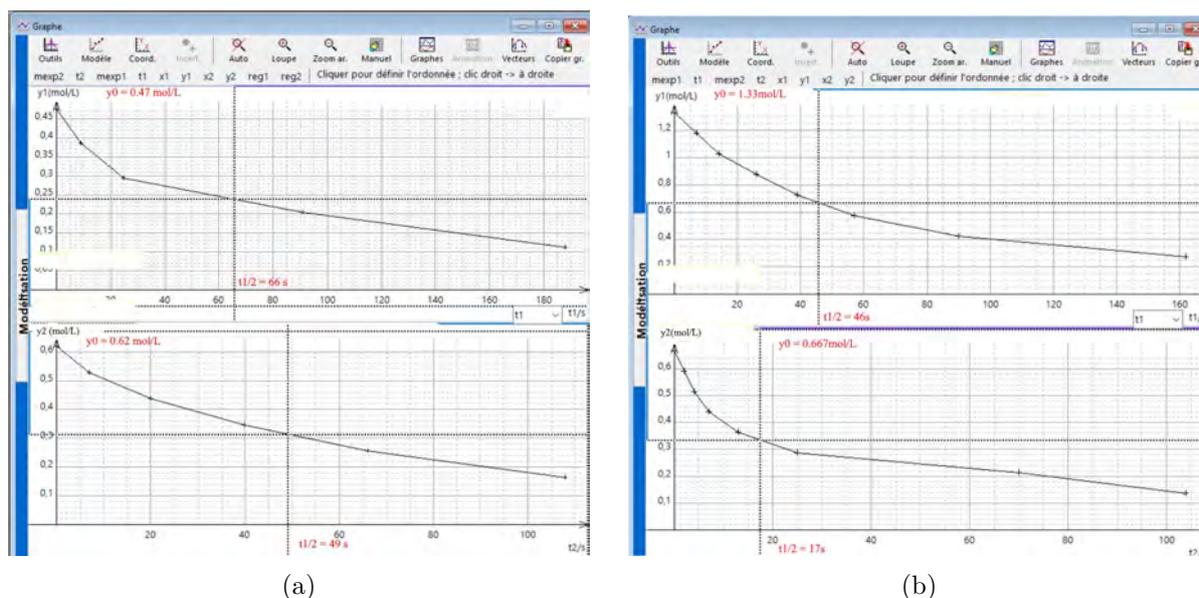


FIG. 4 : a) Concentration de $\text{HCO}_3^-(\text{aq})$ en fonction du temps. b) Concentration d'acide éthanóique en fonction du temps.

À partir de la courbe 4a, nous pouvons observer que le temps de demi réaction est inversement

proportionnel à la concentration en $\text{HCO}_3^-(\text{aq})$. Nous avons donc un ordre 2 en $\text{HCO}_3^-(\text{aq})$. À partir de la courbe 4a, nous pouvons observer que le temps de demi réaction est proportionnel à la concentration en acide éthanóique. Nous avons donc un ordre 0 en $\text{CH}_3\text{COOH}(\text{aq})$. Après résolution de l'équation différentielle,

$$\frac{d[\text{HCO}_3^-(\text{aq})]}{dt} = -v = -k[\text{HCO}_3^-(\text{aq})]^2$$

nous obtenons, la concentration en $\text{HCO}_3^-(\text{aq})$ en fonction du temps.

$$[\text{HCO}_3^-(\text{aq})](t) = \frac{1}{kt + \frac{1}{[\text{HCO}_3^-(\text{aq})]_0}} \quad (4)$$

Pour obtenir un coefficient de corrélation et valider ou invalider les courbes, nous effectuons la régression linéaire 5, nous obtenons le tableau 5.

$$\frac{1}{[\text{HCO}_3^-(\text{aq})]} = \underbrace{k_{app}}_{=a} t + \underbrace{\frac{1}{[\text{HCO}_3^-(\text{aq})]_0}}_{=b} \quad (5)$$

Avec a en $\text{L s}^{-1} \text{mol}^{-1}$ et b L mol^{-1} .

$[\text{HCO}_3^-(\text{aq})]_0$	$[\text{CH}_3\text{COOH}(\text{aq})]_0$	k_{app}	$a \times 10^{-3}$	b	r	$k \times 10^{-3}$
2,0	1,33	$k[\text{HCO}_3^-(\text{aq})]_0^2$	$(18,2 \pm 0,5)$	$(0,71 \pm 0,04)$	0,9996	$(4,6 \pm 0,1)$
2,0	0,667	$k[\text{HCO}_3^-(\text{aq})]_0^2$	(51 ± 9)	$(1,8 \pm 0,4)$	0,98	$(13 \pm 2,3)$
0,47	1,33	k	(35 ± 4)	$(2,2 \pm 0,5)$	0,996	(35 ± 4)
0,62	1,33	k	(40 ± 7)	$(1,5 \pm 0,4)$	0,993	(40 ± 7)

FIG. 5 : Tableau récapitulatifs des 4 expériences (les concentrations sont en mol L^{-1}).

Premièrement, on peut voir que les coefficients de corrélation sont bons, donc l'ordre 2 ne semble pas devoir être remis en question. D'autre part, on peut voir qu'il y a une grande différence sur le k entre les deux expériences. En effet, naïvement, nous avons calculé la concentration sans prendre en compte le maximum de dissolution. D'après cet article de Wikipédia¹, on sait que l'on peut au maximum dissoudre 9,6g de bicarbonate de soude dans 100g d'eau. La concentration maximale en $\text{HCO}_3^-(\text{aq})$ est de $1,14 \text{mol L}^{-1}$. En prenant en compte le maximum de dissolution, on corrige la dernière colonne et on obtient :

$$k = \{(14,0 \pm 0,04), (40 \pm 7), (35 \pm 4), (40 \pm 7)\}$$

La première valeur nous semblant aberrante, nous avons décidé de moyenniser uniquement les trois autres pour déterminer k . Ainsi, on obtient que : $k = (38 \pm 6) \times 10^{-3} \text{L}^3 \text{s}^{-1} \text{mol}^{-3}$

4.5 Détermination de la masse de Bicarbonate

À partir de l'équation 4, nous avons pu écrire un premier programme nous donnant la masse « idéale » de bicarbonate de soude à mettre. De façon, arbitraire, nous nous sommes dit que si la pression nécessaire n'était pas atteinte au bout de 1min, la fusée ne décollerait pas de façon optimale. Nous avons obtenu la courbe 6. Nous pouvons voir que pour une fusée chargée à moins de 35g, l'éjection ne se fait pas en moins de 1min. De plus, pour avoir un temps d'éjection inférieur à 1min, il faut mettre 5g de bicarbonate de soude.

Cependant, le calcul a été fait uniquement en prenant en compte l'avancement. Or, il n'est pour l'instant pas démontré que remplir la fusée au maximum de sa capacité l'aide à s'envoler, bien au contraire. Ainsi, cette courbe n'est pas à prendre comme un résultat final mais nous permet au moins d'avoir un ordre de grandeur.

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Bicarbonate_de_sodium

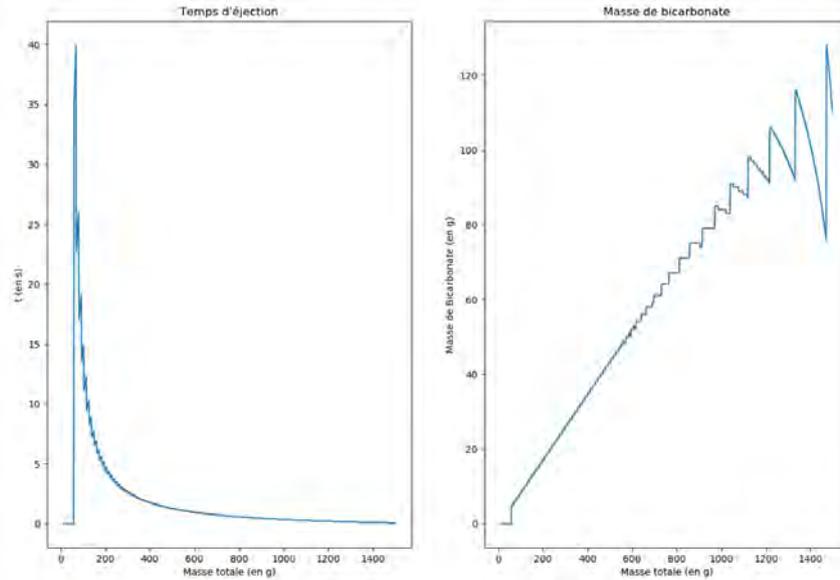


FIG. 6 : Masse de bicarbonate.

4.6 Conclusion de la partie

En conclusion, nous avons pu déterminer les quantités minimales de réactifs à utiliser pour que le bouchon soit expulsé ainsi que l'avancement de la réaction. Néanmoins, lorsque nous réalisons nos expériences, nous ne mettons pas directement le vinaigre en contact avec le bicarbonate de soude. En effet, ce dernier est placé dans un mouchoir, principalement pour des questions de sécurité (sinon la réaction se ferait trop rapidement et nous n'aurions pas le temps de nous éloigner). Ainsi, la dissolution dans le vinaigre (équation 1) est extrêmement ralentie par cet obstacle, c'est pourquoi d'ailleurs il est conseillé dans le protocole de fissurer légèrement le boudin de bicarbonate en son centre. En faisant comme tel, la fusée décolle alors entre 30 secondes et une minute après notre départ.

Il faut donc remarquer que les quantités de réactifs ne peuvent pas être aussi minimales que nous le souhaiterions. De fait, comme nous le précisons dans le protocole, il est nécessaire que le boudin soit immergé dans le vinaigre. De plus, notre fusée ayant un réservoir relativement large, de trop petites quantités de réactifs mettent alors un temps très long à produire la pression nécessaire à l'intérieur, pouvant donner un décollage 20 minutes après le démarrage de l'expérience ce qui n'était pas du tout dans notre intérêt. De fait, notre bouchon n'étant pas totalement hermétique, du gaz peut donc s'échapper pendant les 20 minutes et compromettre le vol.

5 Étude cinétique

Dans un deuxième temps, nous avons voulu étudier la trajectoire de notre fusée. Nous avons commencé par faire une étude théorique du vol.

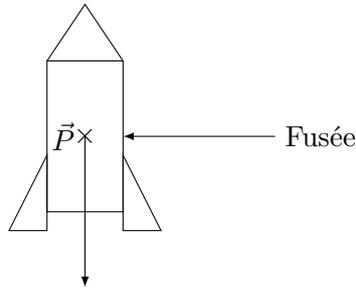
5.1 Définition du problème

Système : Fusée

Référentiel : Galiléen centré au point de décollage

Bilan des forces : • Le poids : $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$ • La force de trainée : $\vec{F} = -\frac{1}{2}C_x\rho S v^2\vec{u}_y$

Schéma : Schéma avec les forces en action :



Dans un premier temps, nous négligerons la force de trainée. Dans les deux cas, nous distinguons deux phases lors du vol de la fusée : la première lorsque le bouchon puis le vinaigre est expulsé de la fusée et une seconde lorsque qu'il n'y a plus de gaz à expulser.

5.2 Sans frottements

5.2.1 Première phase

Dans cette phase de vol, la masse de la fusée n'est pas constante et dépend du débit massique d'éjection du vinaigre de la fusée. Ainsi,

$$m = m_{tot} - D_m t \quad \text{avec} \quad m_{tot} = m_{gaz} + m_{fus}$$

Nous écrivons le principe fondamentale de la dynamique.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{P} \quad (6)$$

On projette 6 selon l'axe \vec{u}_y .

$$\begin{aligned} \frac{d(m\dot{y})}{dt} &= -mg \\ \dot{y} \frac{dm}{dt} + m\ddot{y} &= -(m_{tot} - D_m t)g \\ (m_{tot} - D_m t)\ddot{y} - D_m \dot{y} &= -(m_{tot} - D_m t)g \end{aligned}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre en \dot{y} à coefficients constants, la solution générale est de la forme :

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_{EH}(t) + \dot{y}_p(t)$$

Après calcul, nous obtenons l'équation suivante avec A une constante d'intégration.

$$\dot{y}(t) = \frac{A - \frac{m_{tot}^2}{2D_m}g}{m_{tot} - D_m t} + \frac{m_{tot}g}{2D_m} - \frac{1}{2}gt$$

Nous devons déterminer la constante A . À $t = 0$, $\dot{y} = v_0$ avec l'éjection du bouchon comme nous le montrent les courbes expérimentales. Ainsi, $A = m_{tot}v_0$.

Enfin,

$$\dot{y}(t) = \frac{v_0 - \frac{m_{tot}}{2D_m}g}{1 - \frac{D_m}{m_{tot}}t} + \frac{m_{tot}g}{2D_m} - \frac{1}{2}gt \quad (7)$$

Nous avons maintenant besoin de la position et pour cela nous allons intégrer 7.

$$y(t) = -\frac{m_{tot}}{D_m} \left(v_0 - \frac{m_{tot}}{2D_m}g \right) \ln \left(1 - \frac{D_m}{m_{tot}}t \right) + \frac{m_{tot}g}{2D_m}t - \frac{1}{4}gt^2 + cste$$

À $t = 0$, $y = 0$ (origine du repère).

$$y(t) = -\frac{m_{tot}}{D_m} \left(v_0 - \frac{m_{tot}}{2D_m}g \right) \ln \left(1 - \frac{D_m}{m_{tot}}t \right) + \frac{m_{tot}g}{2D_m}t - \frac{1}{4}gt^2 \quad (8)$$

5.2.2 Seconde phase

Lorsqu'il n'y a plus de vinaigre à éjecter (i.e $m_{tot} = m_{fus}$ ou $m_{gaz} = 0$), la masse devient constante. Ainsi, on applique une seconde fois le principe fondamentale de la dynamique mais cette fois-ci avec une masse constante.

$$m\vec{a} = \vec{P}$$

En projection selon \vec{u}_y ,

$$\begin{aligned} m_{fus}\ddot{y} &= -m_{fus}g \\ \ddot{y} &= -g \end{aligned}$$

En intégrant, $\dot{y} = -gt + cste$.

⚠ Pour déterminer la constante, il faut prendre le temps où $m_{tot} = m_{fus}$, i.e : lorsque

$$m_{tot} - D_m t_1 = m_{fus} \iff t_1 = \frac{m_{tot} - m_{fus}}{D_m} = \frac{m_{gaz}}{D_m}$$

On notera,

$$\begin{aligned} y_1 = y(t_1) &= -\frac{m_{tot}}{D_m} \left(v_0 - \frac{m_{tot}}{2D_m}g \right) \ln \left(1 - \frac{D_m}{m_{tot}}t_1 \right) + \frac{m_{tot}g}{2D_m}t_1 - \frac{1}{4}gt_1^2 \\ v_1 = \dot{y}(t_1) &= \frac{v_0 - \frac{m_{tot}}{2D_m}g}{1 - \frac{D_m}{m_{tot}}t_1} + \frac{m_{tot}g}{2D_m} - \frac{1}{2}gt_1 \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi ces équations

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_1 + gt_1)t + y_1 + \frac{1}{2}gt_1^2 - (v_1 + gt_1)t_1 \quad (9)$$

$$\dot{y}(t) = -gt + v_1 + gt_1 \quad (10)$$

5.3 Avec les frottements

5.3.1 Première phase

Nous écrivons le principe fondamentale de la dynamique en y ajoutant les frottements.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{P} + \vec{F} \quad (11)$$

De même, on projette [11](#) selon l'axe \vec{u}_y .

$$(m_{tot} - D_m t)\ddot{y} - D_m \dot{y} = -(m_{tot} - D_m t)g - \frac{1}{2}C_x \rho S \dot{y}^2 \quad (12)$$

Nous ne connaissons pas de façon pour résoudre cette équation différentielle alors nous allons la résoudre informatiquement avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

5.3.2 Seconde phase

Le principe fondamentale de la dynamique nous donne

$$m_{fus}\ddot{y} = -m_{fus}g - \frac{1}{2}C_x \rho S \dot{y}^2 \quad (13)$$

Afin de pouvoir réaliser une simulation de la trajectoire de notre fusée à partir de ces équations, il nous a fallu tout d'abord déterminer les paramètres expérimentaux dont elles dépendent, i.e. la vitesse initiale et le débit massique.

5.4 Détermination des paramètres expérimentaux

5.4.1 Débit massique

Afin de faire une estimation du débit massique, nous avons relevé dans un tableau pour chaque lancer de fusée le temps qu'il avait fallu pour éjecter tout le liquide avec la quantité de liquide correspondante. Il faut néanmoins signaler que ces mesures ont été réalisées avec un appareil photo dont la résolution ne permettait d'avoir des images que toutes les 0,033 secondes. Or, le débit massique étant très rapide (cf tableau ci-dessous), cela nous laisse une incertitude non négligeable sur sa mesure. De plus, le bécher utilisé pour doser la quantité de vinaigre n'était millimétré que tous les 50mL ce qui est également peu précis (cf incertitudes relatives ci-dessous).

Par ailleurs, nous avons fait l'hypothèse ici que ce débit était constant. L'éjection étant très rapide, cette hypothèse ne semble pas absurde.

Temps (s)	0,267	0,300	0,267	0,200	0,334	0,133	0,100	0,100	0,200	0,133
Liquide éjecté (L)	0,35	0,325	0,35	0,30	0,35	0,25	0,20	0,25	0,30	0,20
Débit (Ls^{-1})	1,1	1,1	1,1	1,5	1,0	1,9	2,0	2,5	1,5	1,5
Incertitude relative (Ls^{-1})	0,21	0,20	0,21	0,37	0,17	0,66	0,91	1,1	0,37	0,56

FIG. 7 : Tableau récapitulatif des mesures.

Pour le calcul de l'incertitude relative sur le débit, nous avons :

$$\frac{\delta D}{D} = \frac{\delta t}{t} + \frac{\delta L}{L} \quad \text{soit} \quad \delta D = D(0,033t + 0,025L)$$

La médiane de la série de mesures [7](#) est de 1,5L pour le débit, c'est donc ce que nous prendrons comme valeur par la suite dans nos simulations. Nous noterons néanmoins que l'incertitude sur cette valeur est non négligeable.

5.4.2 Vitesse initiale

Le second paramètre qu'il nous a fallu déterminer est la vitesse initiale v_0 . Pour ce faire, nous avons appliqué le protocole présenté en annexe [A.2](#). Il nous a fallu ici utiliser un appareil avec une meilleure résolution. En effet, notre dispositif atteint une vitesse maximale au bout de 0,2 secondes. Ainsi, il nous fallait beaucoup plus de points par images pour avoir une estimation de v_0 qui ne soit pas trop mauvaise. De plus, nous pensions au début pointer sur le centre de masse de notre fusée puis

nous nous sommes rendu compte que le plus simple était de pointer le bouchon lorsque celui-ci est expulsé.

En effet, le bouchon suit une équation de mouvement 15 très simple et bien connue avec laquelle nous pouvons faire une régression linéaire à partir des valeurs récupérées par Tracker et du dispositif montré en annexe A.2. Nous n'avons pu faire que trois essais et seulement un seul a donné des valeurs exploitables car le bouchon rebondissait sur une surface à l'expulsion et il nous manquait des réactifs pour en refaire.

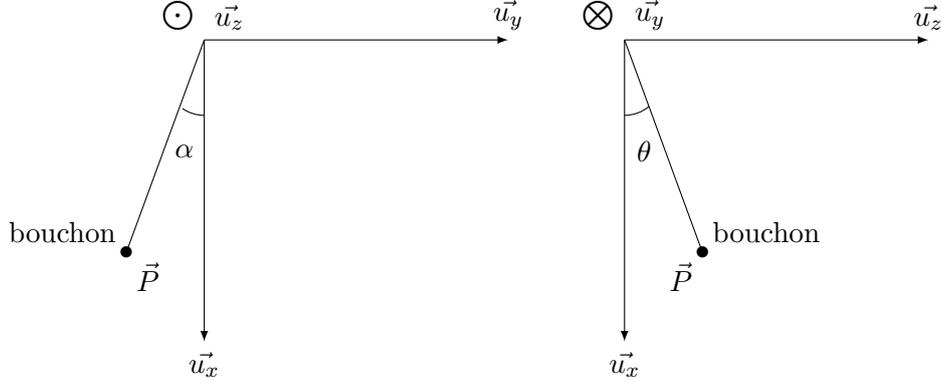


FIG. 8 : Figure de projection.

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 \cos(\alpha) \cos(\theta)t \quad (14)$$

$$y(t) = -v_0 \sin(\alpha) \cos(\theta)t \quad (15)$$

$$z(t) = v_0 \sin(\theta)t \quad (16)$$

Caméra 1	équations	a (en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)	b (en mm s^{-1})	c (en mm)	Coefficient de corrélation
	$x(t)$	$(5,4 \pm 0,4)$	(-317 ± 342)	(170 ± 67)	0,990
	$y(t)$	0	(-536 ± 12)	(210 ± 5)	0,9986
Caméra 2	équations	a	b	c	Coefficient de corrélation
	$x(t)$	$(5,4 \pm 0,5)$	(233 ± 325)	(230 ± 50)	0,988
	$z(t)$	0	(492 ± 20)	(-105 ± 7)	0,996

FIG. 9 : Régressions linéaires.

Les coefficients de corrélation ne sont pas mauvais, mais pas non plus exceptionnels i.e. les points ne sont pas très bien alignés. Nous remarquons aussi, avec les deux courbes $x(t)$ que nous retrouvons $g = 10,8 \pm 0,8 \text{ m s}^{-2}$ et $g = 10,8 \pm 0,8 \text{ m s}^{-2}$ ce qui correspond, incertitude prise en compte, à la valeur que nous utilisons usuellement.

De plus, nous avons $\alpha = (3,6 \pm 5,3 \times 10^{-4})^\circ$ et $\theta = (5,4 \pm 5,9 \times 10^{-4})^\circ$, en prenant 1mm d'erreur sur la mesure des distances. Ainsi nous obtenons 4 valeurs de v_0 .

	Caméra 1		Caméra 2	
	$x(t)$	$y(t)$	$x(t)$	$z(t)$
v_0 en m s^{-1}	$0,32 \pm 0,35$	$8,6 \pm 0,3$	$0,23 \pm 0,32$	$5,2 \pm 0,2$

FIG. 10 : Calcul de v_0 .

En prenant une vitesse initiale donnée par la coordonnée x , la fusée ne décolle pas dans la simulation. De plus, l'erreur relative est plus grande que la valeur elle-même ce qui laisse penser une erreur de mesure. Nous ferons donc la moyenne des deux valeurs données par les coordonnées z et y . Ainsi,

nous prendrons

$$v_0 = (6,9 \pm 0,2) \text{ms}^{-1}$$

Ces deux paramètres étant déterminés, nous avons pu rentrer dans un programme nos équations afin de faire afficher les courbes théoriques attendues pour notre dispositif (position en fonction du temps, vitesse en fonction du temps et accélération en fonction du temps). Celles-ci étaient alors très proches de nos courbes expérimentales obtenues avec notre premier dispositif (cf. courbes dans la section suivante) et l'expérience semblait plus que reproductible (nous obtenions le même type de courbes à chaque fois avec les mêmes propriétés pour les lancers successifs). Nous avons alors trouvé cela intéressant de comparer ce dispositif à deux autres dispositifs, un « plus » aérodynamique et un « moins » aérodynamique.

5.5 Aérodynamisme : étude et comparaison de 3 fusées

Ainsi, notre idée était de tester différentes formes de fusée et de comparer leurs trajectoires. Sur la figure 11 apparaissent les trois modèles que nous avons fabriqués (Poséidon correspond à notre dispositif initial).

5.5.1 Les trois fusées



(a) Fusée 1 : Zeus
Poids à vide : 46g
Aileron : Sans



(b) Fusée 2 : Poséidon
Poids à vide : 66g
Aileron : 5 ($l_{moy} = 5,3\text{cm}$)



(c) Fusée 3 : Hadès
Poids à vide : 110g
Aileron : 4 ($l_{moy} = 6,2\text{cm}$)

FIG. 11 : Les trois fusées testées.

5.5.2 Pour le frottement : le coefficient de traînée C_x et la surface de référence

Afin d'afficher les simulations avec frottement, nous avons dû déterminer préalablement le coefficient de traînée ainsi que la surface de référence pour chacune de nos fusées. Pour cela, nous nous sommes donc inspirés de différentes documentations trouvées sur internet.

La surface de référence a été calculée à partir de la méthode expliquée dans le document de Planète-Science², nos trois dispositifs ayant tous une base de même diamètre.

Les C_x ont été déterminés à partir des documents suivants : un cours sur la mécanique³, une étude de la fusée à eau rédigée par entre autre Ayoub Bensaïd⁴ et le document *Mesure de C_x de fusées à eau* de Bernard de *Go Mars!*

Nous récapitulons les valeurs dans le tableau suivant :

2. <https://www.planete-sciences.org/espace/IMG/pdf/vol-de-la-fusee.pdf>

3. <http://www.physagreg.fr/mecanique/m12/M12-chute-libre-frottements.pdf>

4. <http://philippe.berger2.free.fr/Isi/Ressources/pscfuseeaeau.pdf>

	Zeus	Poséidon	Hadès
C_x	1,32	0,41	0,464
S_{ref} (en m^2)	$5,03 \times 10^{-3}$	$5,05 \times 10^{-3}$	$5,05 \times 10^{-3}$

FIG. 12 : Paramètres de vol.

5.5.3 Mesures

Notre expérience a consisté à faire des lancers successifs de nos trois dispositifs avec des intervalles de temps les plus courts possibles afin que les lancers soient faits dans des conditions similaires. De même, nous avons réalisé nos lancers avec les mêmes quantités de réactifs. Nous avons ainsi fabriqué les boudins de bicarbonate exactement comme décrit dans le protocole puis pour avoir des masses les plus précises possibles de vinaigre nous avons à chaque fois rempli le bécher tout en le pesant sur une balance. Plusieurs séries ont été réalisées. Celle présentée ci-dessous s'est faite alors qu'il y avait du vent à 24km h^{-1} (d'après la météo affichée sur internet). Nous avons mis à chaque fois 200mL de vinaigre à 20° dilué avec 100mL d'eau. Nous avons pu en déduire à l'aide du logiciel Tracker les courbes 13, auxquels nous avons pu superposer les simulations théoriques 14.

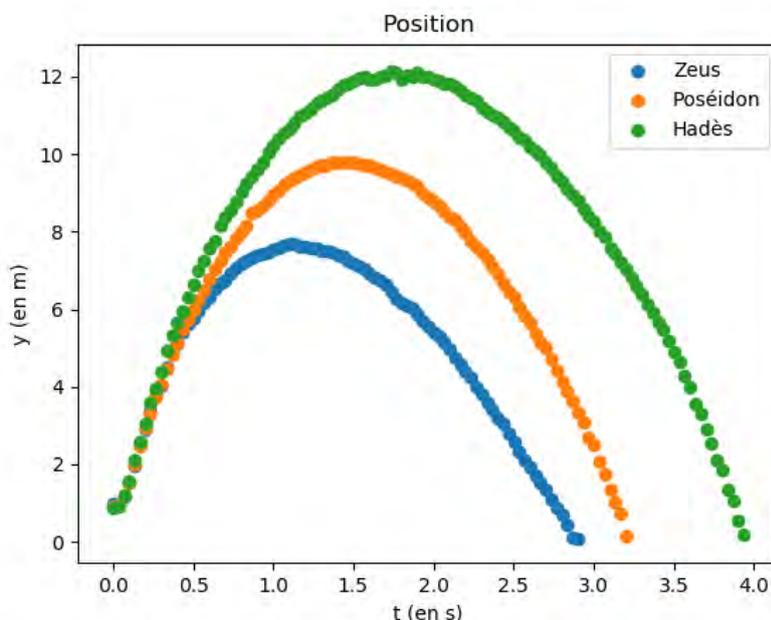


FIG. 13 : Position des trois fusées.

La première chose que nous pouvons remarquer sur la figure 13 est le fait que notre fusée Hadès est la plus performante des trois. En effet, elle va significativement plus haut que ses deux comparses ce qui est bien ce à quoi on s'attendait puisque sa forme est censée être la plus aérodynamique. De même, la fusée Zeus est bien la plus ralentie lors de son envol. Enfin, il peut être intéressant de noter que bien que nos fusées soient différentes et n'aillent pas toutes aux mêmes hauteurs, leur trajectoire globale garde cependant la même forme.

Nous avons affiché les courbes théoriques sans frottement, avec frottement et expérimentales sur la figure 14. Nous pouvons voir que sur les différentes trajectoires la courbe théorique semble plus éloignée que celle expérimentale alors que celle sans frottement s'en approche plus. Sur la courbe 14b, nous pouvons voir que la courbe avec frottement s'éloigne beaucoup sur la fin, cela est probablement dû au vent.

Nous avons affiché la courbe 14d à partir du calcul de l'erreur absolue entre la position réelle de la fusée et la théorie avec et sans frottement. Avec le module *numpy*, nous avons calculé la moyenne et l'écart-type de ces séries de valeurs, également affichés sur la courbe. Ainsi, nous pouvons voir que l'erreur moyenne de simulation sans frottement est plus grande pour les deux premières fusées, soient

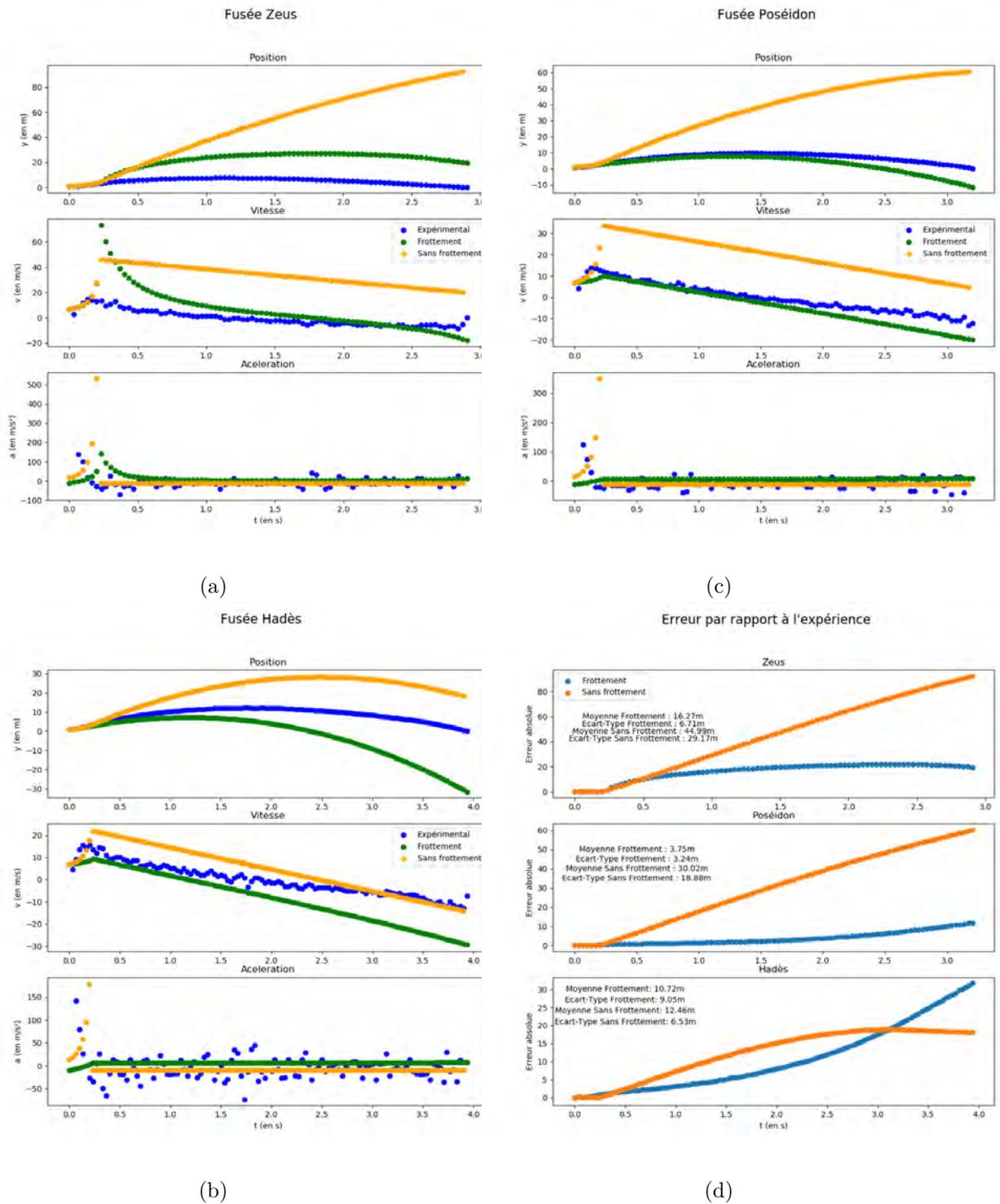


FIG. 14 : a) Courbe mouvement Zeus. c) Courbe mouvement Poséidon. b) Courbe mouvement Hadès. d) Erreur absolue.

celles avec un coefficient de frottement plus grand. Alors que pour la dernière fusée l'erreur moyenne entre frottement et sans frottement est presque similaire, le C_x étant plus faible.

5.6 Piste d'optimisation

Une question légitime méritant d'être posée est la suivante : à quelle masse embarquée la fusée va-t-elle aller le plus haut ? Avec un code python, nous avons obtenu la courbe 15 en gardant le débit et la vitesse initiale constants et en ne prenant pas en compte les frottements. Nous pouvons voir sur cette courbe qu'un maximum de 130m est atteint pour une masse embarquée de 940g. De plus, au vu

de cette courbe, nous pouvons légitimement nous questionner sur les hypothèses de vitesse initiale et de débit constants. En effet, il semble difficile de voir la fusée décoller si elle est remplie entièrement de réactifs. Ceci met en lumière un aspect négligé de notre étude et qui devrait être plus approfondi, l'effet de l'air contenu dans la bouteille sur le mouvement⁵.

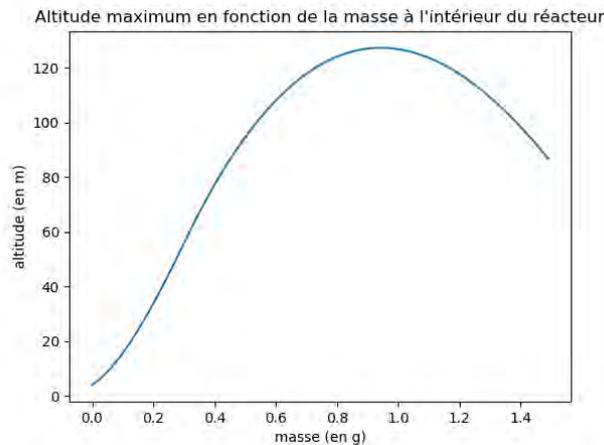


FIG. 15 : Hauteur maximal en fonction de la masse embarquée.

6 Conclusion

En définitive, la fusée à propulsion chimique à base de bicarbonate de soude et de vinaigre nous a permis de faire deux études conjointes : une sur la chimie de la réaction et une sur la cinétique du mouvement. D'une part, nous avons pu déterminer des conditions « optimales » pour le départ de la fusée en étudiant la cinétique de la réaction chimique à l'origine de la propulsion.

Cependant, nous avons tôt fait de comprendre qu'il était bien plus complexe de pouvoir mettre en œuvre lors des expériences ce que nous avons trouvé, ceci principalement pour des raisons techniques et sécuritaires.

D'autre part, nous avons pu constater que nos trajectoires de fusée étaient proches de celles prédites par la réalité, quand bien même nous avons dû faire beaucoup d'approximations (majoritairement par manque de matériel adéquate).

Ainsi, au terme de ce projet, nous avons été plutôt satisfaits des résultats que nous avons pu obtenir avec peu de moyens. Cependant, nous aurions aimé pouvoir effectuer certaines manipulations de manière plus précise comme pour l'avancement de la réaction et également déterminer le coefficient de traînée de nos fusées. Enfin, nous regrettons aussi de n'avoir pas eu plus de temps pour explorer d'autres idées qui nous étaient venues (comme le cas de l'altitude maximale partie 5.6).

5. À la lumière de la page 23 de ce diaporama <https://www.slideserve.com/vince/les-fusees-a-eau>

A Protocoles

A.1 Protocole expérimental pour la réalisation d'un dispositif de fusée et de son lancer

A.1.1 Matériel

- 2 bouteilles en plastique de 1,5L
- Des ciseaux
- Un bouchon en liège
- Du scotch épais
- Des mouchoirs
- Du bicarbonate de soude
- Du vinaigre
- De la ficelle fine (ici on prendra finalement du fil dentaire)
- Un verre doseur avec un bec verseur
- Une base de lancement(ici une table avec un trou)
- Un seau
- Une caméra

A.1.2 Réalisation de la fusée

1. Prendre une des deux bouteilles, lui mettre la tête en bas (c'est elle qui jouera le rôle de réservoir) et lui enlever son bouchon
2. Découper le haut de la 2^{ème} bouteille de telle sorte qu'il puisse s'emboîter sur le « bas » de la première bouteille et les scotcher ensemble
3. Ensuite, découper le reste de la deuxième bouteille en deux parties : l'une servira à faire les ailerons et l'autre à les fixer sur notre fusée
4. Dessiner les ailerons au marqueur sur la partie basse de la bouteille qu'on vient de découper
5. Découper les ailerons
6. Fixer les ailerons avec le scotch épais en découpant de très légères fentes dans la partie qu'on a rajoutée pour fixer les ailerons. Le corps de la fusée est ainsi terminé!

A.1.3 Mise en place du lancer

1. Peser 24g de bicarbonate de soude.
2. Verser le bicarbonate de soude sur un mouchoir.
3. Rouler le mouchoir de telle sorte à former un « boudin » et le ficeler à chaque extrémité puis rajouter un deuxième mouchoir autour du boudin, l'enrouler puis ficeler de nouveau en laissant un bout plus long à l'une des extrémités.
4. Ajuster la largeur du bouchon en liège en rajoutant du scotch autour afin que la bouteille soit bien fermée.

5. Venir placer la bouteille au centre d'une table possédant un trou sous lequel on aura préalablement placé un seau permettant de récupérer les produits de la réaction lors de la propulsion de la fusée.
6. Verser du vinaigre dans le réservoir et de manière suffisante pour que le boudin soit immergé (la fusée est donc pour le moment la « tête à l'envers »).
7. Déchirer légèrement le cœur du boudin puis le faire rentrer dans le réservoir et le suspendre au-dessus du vinaigre déjà présent (pour éviter de faire démarrer la réaction tout de suite) en coinçant la ficelle avec le bouchon.
8. Il ne reste maintenant plus qu'à retourner la fusée, secouer et s'éloigner.



1



2



3



4



5



(a) 6



7



8

A.2 Protocole de mesure de v_0

A.2.1 Matériel

Il faut d'abord avoir en sa possession :

- Une fusée en plastique (si non faite, suivre le protocole précédent)
- Une base de lancement (ici un pot de fleur)
- Un poids uniforme (ici un écrou) et un filin
- Deux caméras (60 fps si possible)
- Un mètre mesureur

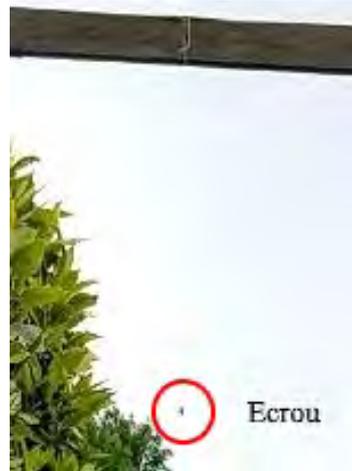
A.2.2 Mise en place de l'expérience

1. Positionner la base de lancement assez haute par rapport au sol.
2. Positionner le fil et le poids de tel façon à ce qu'il puisse être filmé.
3. Déterminer une échelle de taille visible sur le film.
4. Placez les deux caméras de façon perpendiculaire.

5. Préparez la fusée comme pour le protocole précédent, cependant, il ne faut pas accrocher le fil au bouchon mais seulement le coincer (cf figure).



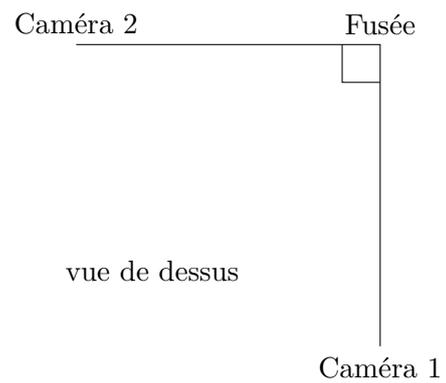
1



2



3



4



5