

Calcul de l'écart angulaire entre nos positions

Par Nischal DHUNGANA (Népal) et Damien TOQUER (France)

Sommaire

- I. Introduction
- II. Résultats
- III. Conclusions
- Remerciement
- Source

I. Introduction

Nous avons, dans le cadre de ce TP confiné voulu utilisé le fait que nous soyons éloigné d'une grande distance pour réaliser notre expérience. Nous avons donc décidé d'essayer de déterminer l'écart angulaire entre nous deux (et donc notre distance relative).

La première expérience que l'on a décidé de mener est une mesure de l'écart de longitude. La solution la plus simple serait de calculer le décalage horaire à partir de notre heures respectives, mais cette méthode est peu précise à cause des fuseaux horaires. On a donc décidé de mesurer l'heure de nos Zéniths respectifs un même jour. Le protocole est simple : On place un gnomon bien horizontal sur le sol et on mesure la taille de l'ombre autour du Zénith (1h avant et après). L'heure où la taille est minimale est l'heure du Zénith.

Un autre intérêt de ce protocole est de pouvoir déterminer l'écart de latitude, en effet le ratio de la longueur de l'ombre au Zénith sur la longueur du bâton est la tangente de la latitude.

On a ensuite voulu réaliser une autre expérience pour comparer les résultats. On a pas trouvé d'autre expérience pour l'écart de longitude, mais pour l'écart de latitude il suffit d'utiliser le champs magnétique. En effet, en considérant la Terre comme un aimant, on sait que les champs radial (perpendiculaire au sol) et tangentiel dépendent de la latitude. Trois problèmes surviennent :

- On ne sait pas à quel point ce modèle est précis (les variations locales et/ou temporelles sont elles importantes?)
- Ce modèle dépend de constantes que l'on ne connaît pas
- La latitude qui survient n'est pas la latitude géographique mais la latitude géomagnétique (par rapport à l'axe géomagnétique terrestre)

Pour résoudre ce problème on a décidé de demander à des gens du monde entier d'aligner leur téléphone avec une boussole parallèlement au sol et de déterminer à l'aide de phyphox sur une période de 30s les 3 composantes du champs. On a aussi fait la même chose de notre côté régulièrement pendant 2 jours pour savoir si le champs variait beaucoup ou non en fonction des jours.

II. Résultats expérimentaux

Première expérience : Calcul de l'écart de longitude par calcul de l'heure du zénith. Photos des dispositifs expérimentaux (France/Népal) :



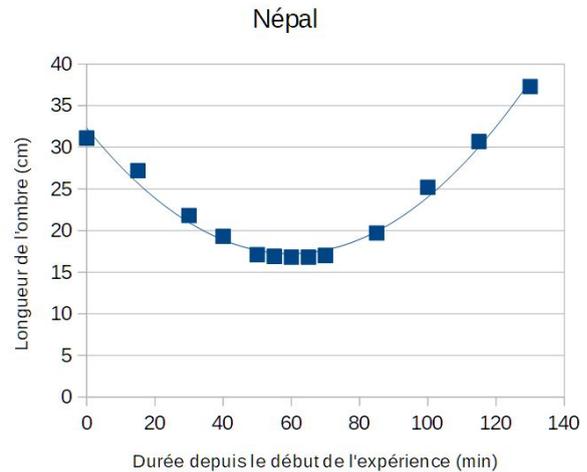
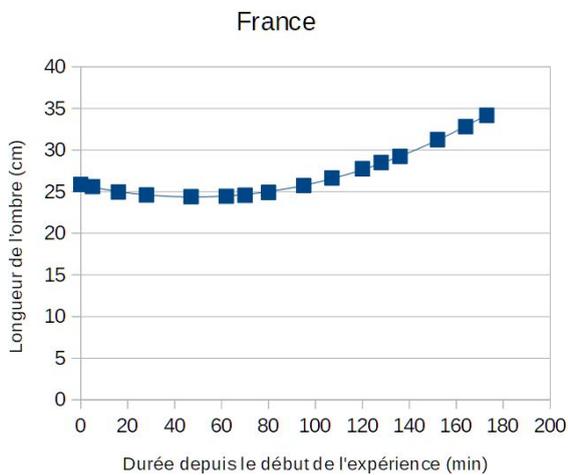
On sait que la longueur en fonction du temps suit une loi en :

$$L = \frac{L_0}{\cos(e(t-t_0))}$$

Où L_0 est la longueur de l'ombre au Zénith, t_0 l'heure du zénith et e une vitesse angulaire. Nos mesures sont proches du zénith, on peut donc développer à l'ordre 2 cette équation sous la forme quadratique:

$$L = L_0 + \frac{(e \times t_0)^2}{2} - (e^2 \times t_0)t + \frac{e^2}{2} \times t^2$$

En approximant notre suite de données par un polynôme de degré 2, on obtient



On obtient en France un zénith à 13h48±2 min et au Népal à 12h00±2 min. Le décalage officiel est de 3h45 min.

On en déduit un décalage horaire de 4h33±4 min, donc un écart de longitude de $\Delta\phi = (83 \pm 1)^\circ$.

Deuxième expérience : Calcul de l'écart de latitude par calcul de la taille de l'ombre au Zénith.

Méthode pour calculer la distance longitudinale entre nous.

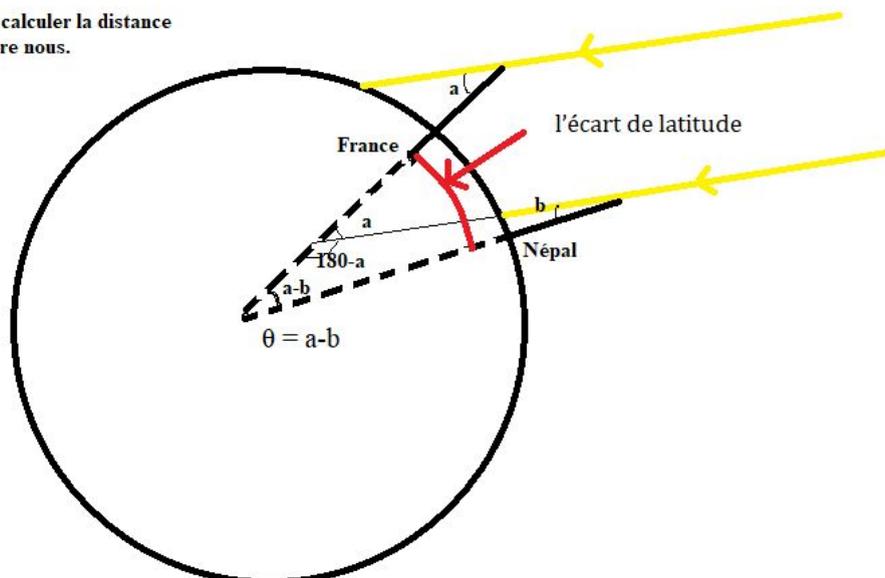


Schéma montrant la méthode pour calculer l'écart de latitude

Or d'après le schéma, on a :

$$\theta_F = a + \lambda, \theta_N = b + \lambda$$

Avec λ l'inclinaison à laquelle le soleil éclaire la Terre. λ étant inconnu, on peut uniquement calculer la différence de latitude :

$$\Delta\theta = \theta_F - \theta_N = a - b$$

a et b peuvent être directement obtenu à partir des longueurs du bâton et de son ombre au Zénith, on a en effet :

$$\tan(a) = \frac{L_{0,F}}{L_F}, \tan(b) = \frac{L_{0,N}}{L_N}$$

Voici les résultats de longueur que l'on a obtenu :

Pays	Népal	France
Longueur du bâton	$L_N = (131,0 \pm 0,1)\text{cm}$	$L_F = (41,9 \pm 0,1)\text{cm}$
Longueur de l'ombre au Zénith	$L_{0,N} = (17,1 \pm 0,3)\text{cm}$	$L_{0,F} = (24,4 \pm 0,3)\text{cm}$

On en déduit $a = 30,2^\circ$ et $b = 7,4^\circ$ soit $\Delta\theta = a - b = (22,8 \pm 2)^\circ$

Incertitude des 2 expériences solaires : Les incertitudes significatives de cette méthode (méthode d'Eratosthène) viennent de:

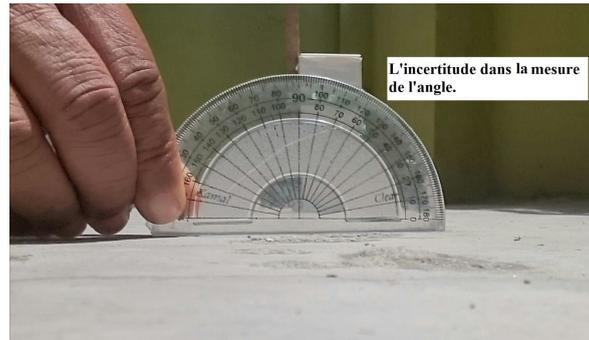
- La difficulté à placer le gnomon bien perpendiculaire au sol
- Le flou de l'ombre
- La précision de notre instrument.

On peut ainsi estimer une incertitude des mesures d'écart de latitude et longitude.

Pour la différence de longitude (expérience 1), le flou de l'ombre n'intervient pas dans la détermination du minimum. L'incertitude des résultats de l'expérience est donnée par celle

de l'approximation polynomiale (avec propagation des incertitudes). La verticalité du gnomon n'intervient pas non plus.

Pour la différence de latitude (expérience 2), le flou de l'ombre intervient ainsi que la verticalité du gnomon.



On a calculé les incertitudes suivantes:

Flou de l'ombre δL_0 (en cm)	Limite de l'instrument δL (e, cm)	La mesure de l'angle δD (en °)
0,3	0,1	0,5

On sait que pour le latitude on a :

$$a = \arctan\left(\frac{L_0}{L}\right)$$

On note : $\frac{L_0}{L} = l$

$$\delta l = (l) \times \left(\frac{\delta L_0}{L_0} + \frac{\delta L}{L}\right)$$

Or :

$$\frac{d(\arctan)}{dx}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

D'où en utilisant la méthode des dérivées partiels pour trouver les incertitudes on a :

$$\delta a = \delta D + \frac{\delta l}{1+l^2}$$

Où δD est l'incertitude sur la verticalité du gnomon qui a une conséquence directe sur la valeur de a et b.

On trouve δb dans le même manière et notre incertitude totale devient $\delta(\Delta\theta) = \delta a + \delta b$.

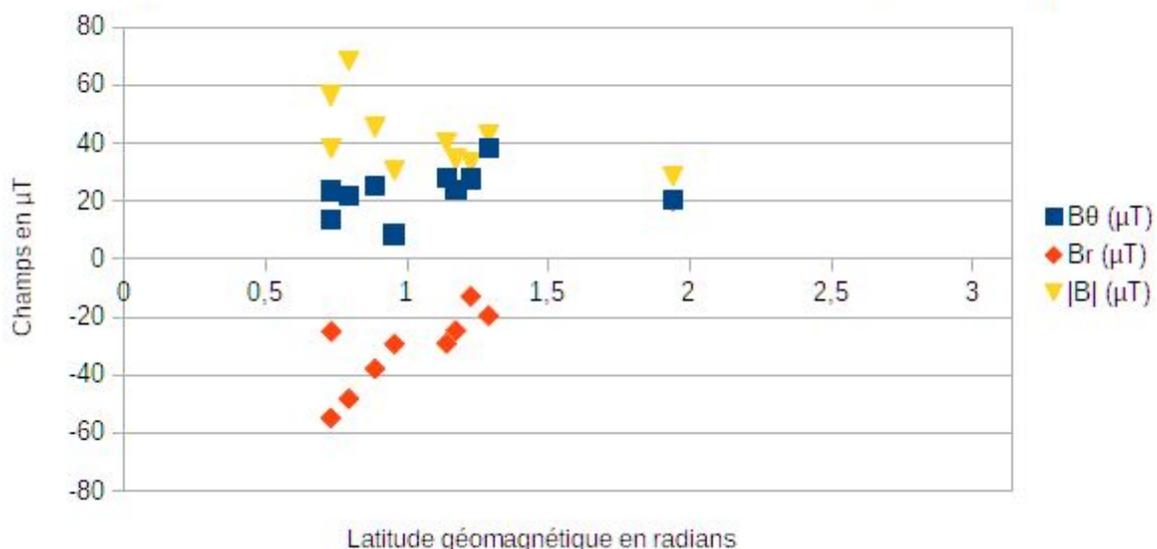
Par cette méthode on obtient une incertitude pour notre latitude $\pm 2^\circ$.

Troisième expérience : Détermination de la latitude géomagnétique par mesure de magnétisme.

Voici les résultats qui nous sont parvenus du monde entier :

Ville, Pays	Latitude géomagnétique	Longitude géomagnétique	B_θ	B_ϕ	B_r	$ B $
Washington DC, America	0,729	-0,087	-1,011	13,775	-54,720	56,436
Tirana, Albanie	0,955	-2,318	4,621	8,409	-29,243	30,777
Tubas, Palestine	1,139	-2,542	0,171	28,136	-29,075	40,460
Dakar, Sénégal	1,226	1,022	13,788	27,583	-12,831	33,400
Le Caire, Égypte	1,172	-2,471	-0,674	23,962	-24,663	34,393
Surakarta, Indonésie	1,830	2,456	9,320	21,204	44,167	49,872
Amsterdam, Pays bas	0,732	-2,134	16,966	23,647	-24,934	38,324
Bouisse, France	0,886	-2,047	2,336	25,297	-37,785	45,531
Erlangen, Allemagne	0,793	-2,213	-43,699	21,950	-48,183	68,651
Riyad, Arabie Saoudite	1,288	-2,715	1,894	38,394	-19,507	43,107
Bandrele, France	1,940	-2,638	-0,629	20,440	20,151	28,710

Champs radial et tangentielle en fonction de la latitude géomagnétique



On remarque que les champs B_ϕ ne sont pas tous nuls. La principale raison de cet écart vient d'un alignement du téléphone avec la boussole difficile à réaliser en pratique. On en déduit que le champs orthogonal est aussi modifié par ce problème d'alignement. C'est pour ça qu'on va se limiter à utiliser B_r . On a aussi décidé d'enlever certaine données aberrantes.

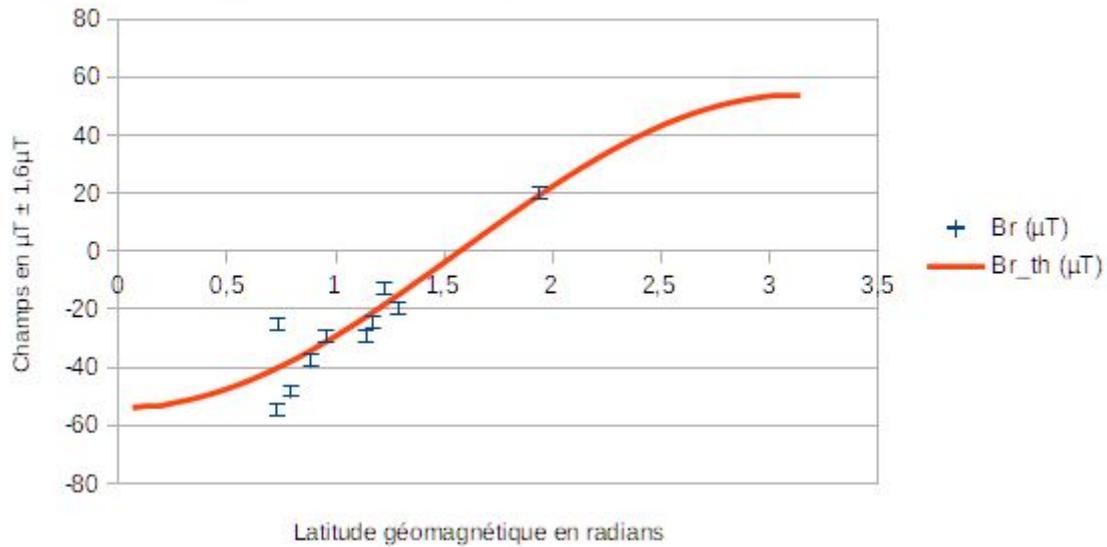
Un modèle dipolaire de la Terre donne:

$$B_r = -2B_0 \cos(\theta)$$

Avec B_0 est la valeur moyenne du champs à la surface de la Terre. Par une méthode des moindres carrés (minimisation de la somme des carrés des écarts au modèle), on peut remonter à la valeur de B_0 . On obtient $B_0 = (28,9 \pm 1,6) \mu\text{T}$.

On obtient finalement ce diagramme avec une bonne correspondance au modèle :

Champs radial expérimental et théorique en fonction de la latitude géomagnétique



Origines des écarts, même en prenant en compte les incertitudes correspondant aux variations journalières (voir plus loin leur détermination) :

- Téléphone légèrement incliné

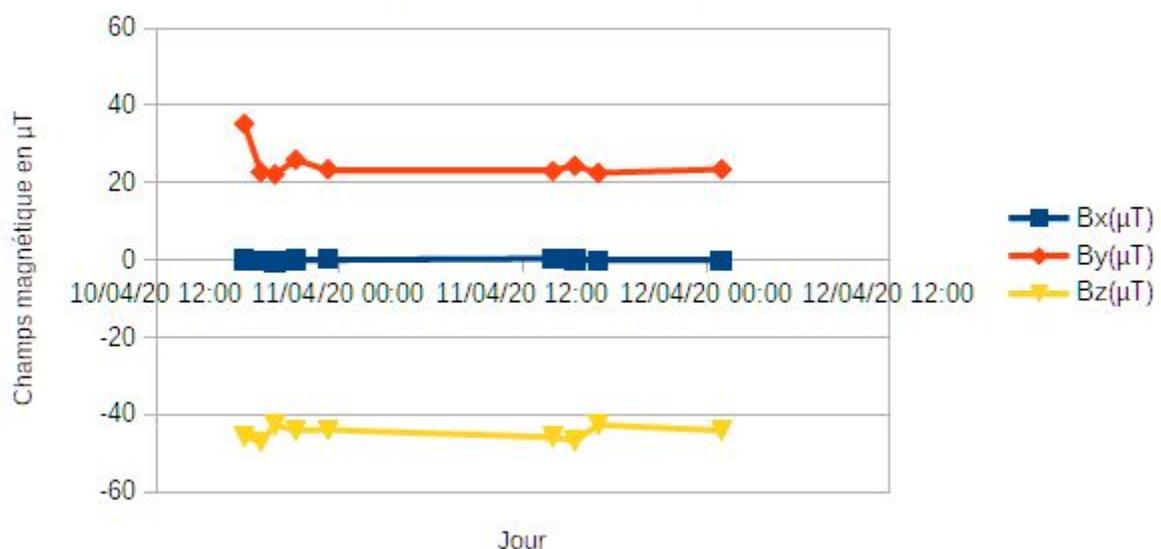
- Variation locale de B (causé par la météo, ou du métal à proximité par exemple)

On a pour Damien : $B_r = (-44,7 \pm 1,6) \mu\text{T}$ on en déduit $\theta_m = (0,69 \pm 0,06) \text{ rad} = (39,5 \pm 3,4)^\circ$

et on a pour Nischal : $B_r = (-36,7 \pm 1,6) \mu\text{T}$ on en déduit $\theta_m = (0,88 \pm 0,06) \text{ rad} = (50,4 \pm 3,4)^\circ$

Incertaince de la troisième expérience : La principale source d'incertaince sur le champs B évaluable sont les variations journalière de champs magnétique. On a donc calculé le champs magnétique régulièrement sur 2 jours pour obtenir :

Evolution journalière du champ magnétique



On peut alors déterminer l'écart type de la série statistique pour obtenir $\delta B = 1.6 \mu T$. On en déduit les incertitudes sur l'angle par propagation des incertitudes.

III. Conclusion

On a obtenu pour les 2 première expérience un écart de longitude de $\Delta\varphi = (83 \pm 1)^\circ$ et de latitude $\Delta\theta = (22,8 \pm 2)^\circ$. On peut comparer ces résultats aux résultats réels.

Pays	Latitude(°,';,")	Latitude(°)	Longitude(°,';,")	Longitude(°)
Népal	27°39'33"	27,66°	85°19'29"	85,32°
France	48°22'33"	48,48°	2°48'54"	2,82°

On obtient $\Delta\theta_{réel} = 20,88^\circ \in [20,8; 24,8]$ et $\Delta\varphi_{réel} = 82,50^\circ \in [82; 84]$. On en déduit que les résultats fournis par l'expérience sont correct mais reste peu précis. En effet, l'écart angulaire $\pm 2^\circ$ sur la latitude correspond à une longueur réelle de environ $\pm 200 km$, soit si on connaissait la position de Nischal au Népal on pourrait juste en conclure que Damien vit dans la partie Nord de la France.

Comment pourrait-on améliorer cette précision ? Les principales sources d'incertitude (sur lesquels on peut avoir un impact) sont:

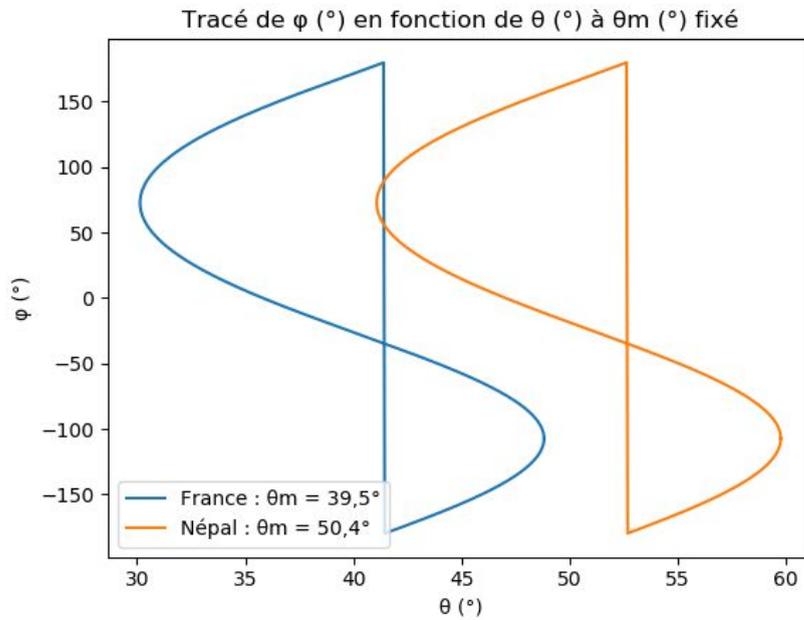
- L'incertitude sur le temps : Nos expérience sont fait à la minute près, on aurait pu se synchroniser à la seconde près et placer les points avec une incertitude de $\pm 1s$ plutôt que $\pm 30s$
- L'incertitude sur la verticalité : Il aurait fallu utiliser un pendule plutôt qu'un gnomon par exemple pour pouvoir négliger cet incertitude

Dans la troisième expérience, on a obtenu les latitudes géomagnétique suivante : $\theta_{m,France} = 39,5 \pm 3,4^\circ$ et $\theta_{m,Népal} = 50,4 \pm 3,4^\circ$. Ces résultats sont peu précis (Ils correspondent à $\pm 350 km$), mais ils ne sont pas non plus correct. Les latitudes magnétique que l'on devrait obtenir sont $\theta_{m,F,réal} = 45,2^\circ \in [36,1; 42,9]$ et $\theta_{m,N,réal} = 71,0^\circ \in [47; 53,8]$.

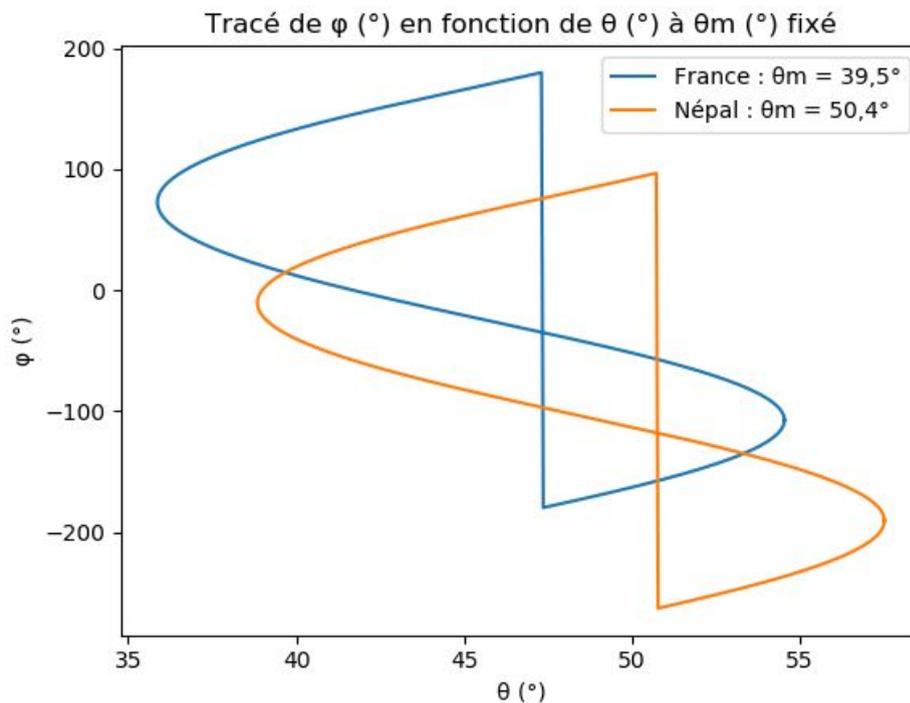
Pendant on rappel que les incertitudes sur nos valeurs de champs magnétique sont issues des évolution temporelle. On en déduit que les écarts locaux entre la réalité et le modèle sont importants, bien que le modèle fonctionne bien à grande échelle. En effet, le plus grand écart au modèle obtenu sur nos résultats expérimentaux est de l'ordre de $10\mu T$ (pour Washington DC, le modèle prévoit $-43,1\mu T$ et on obtient un champs de $-54,7\mu T$).

On peut cependant tenter d'utiliser ces résultats pour estimer notre position. Géométriquement, connaître notre latitude géométrique correspond à nous situer sur un cercle centré sur l'axe géomagnétique. On peut en déduire une relation entre les latitudes et longitudes réelles :

(les lignes verticales ne sont pas "réelles", elles sont liés uniquement au tracé)



Il suffirait de déplacer la courbe du Népal de $\Delta\theta$ et de $\Delta\varphi$, les points d'intersection seraient nos positions géographiques. Cependant les résultats obtenus pour la latitude géomagnétique sont trop peu précis pour le faire (on n'obtient aucune intersection). De plus la position d'une intersection peut être chaotique (elle peut beaucoup varier pour une faible variation des angles). On peut tout de même essayer d'utiliser $\theta_{m,F,réel}$ et $\theta_{m,N,réel}$ les latitudes géomagnétiques réelles. On obtient après déplacement des courbes :



On obtient une intersection à $\theta_F = 39^\circ$ et $\varphi_F = 15^\circ$. Comme prévu ce résultat est peu précis (ces coordonnées sont celle du sud de l'Italie) mais avec une incertitude plus faible sur $\Delta\theta$ et $\Delta\varphi$ on aurait pu en déduire nos positions.

Remerciement

On remercie toutes les personnes qui ont bien voulu nous aider :

- Sergi Valls de Brandele, France
- Mkll Liic de Ryadh, Arabie Saoudite
- Jean-Christophe Algans de Dakar, Sénégal
- Bipul Poudyal de Washington D.C, Etats-unis
- Rasha AbuKeshek de Tubas, Palestine
- Dalin Borici de Tirana, Albanie
- Rahma Essam Eldin Abdeen du Caire, Egypte
- Rima Bushkar de Amsterdam, Pays-Bas
- Benoit Parazols de La Bouisse, France
- Sha Puss de Surakarata, Indonésie
- Sherin Ousheibi de Erlangen, Allemagne

Nous remercions aussi M.Stéphane Douin et M.Claude Pasquier de nous avoir accompagné pour le projet et l'équipe pédagogique des travaux pratiques de nous avoir permis de faire ces travaux pratiques confinés.

Merci d'avoir lu!

Nischal DHUNGANA et Damien TOQUER

Source

Pour les coordonnées géographiques, nous avons utilisé les coordonnées affichées sur les pages wikipédia des différentes villes, ou sur google maps quand elles ne sont pas disponibles.

Pour plus d'informations sur le modèle dipolaire terrestre, voici les pages wikipédia (en anglais)

- https://en.wikipedia.org/wiki/Dipole_model_of_the_Earth%27s_magnetic_field
- https://en.wikipedia.org/wiki/Geomagnetic_pole

Pour les incertitudes voici la méthode utilisée :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Propagation_des_incertainitudes